

Kochsche Schneeflocken

BERNHARD BRODOWSKY – ISST ZUM FRÜHSTÜCK NUR FRAKTALE

Eines der bekanntesten Fraktale, was einer Schneeflocke ähnelt, ist die kochsche Schneeflocke. Aufgrund ihrer Konstruktion enthält sie nur 60° oder 120° Winkel, was auch genau die Winkel sind, die in echten Schneeflocken aufgrund des Dipols von Wassermolekülen zu erwarten sind.

Die Kochsche Schneeflocke wird folgendermassen konstruiert: Man startet in der 0ten Iteration mit einem Dreieck. In jeder darauffolgenden Iteration ersetzt man jedes Liniensegment durch eine Zacke gegen aussen. Konkret entfernt man das mittlere Drittel und fügt zwei gegen aussen zeigende Liniensegmente hinzu, die gleich lang sind wie ein solches Drittel, die sich an ihren äusseren Enden treffen. Der Grenzwert ist dann definiert als die Menge der Punkte, die ab irgendeiner Iteration in jeder darauffolgenden Iteration vorhanden sind sowie die Häufungspunkte dieser Punktmenge.

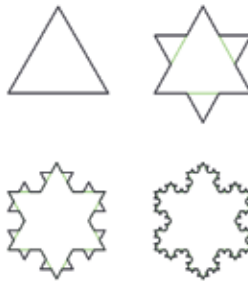
Lustig wird es, wenn man sich überlegt, was der Flächeninhalt und der Umfang einer kochschen Schneeflocke ist. In jedem Schritt wird ja jedes Liniensegment durch eine Zacke ersetzt, die $\frac{4}{3}$ so lang ist. Der Umfang in der 0ten Iteration ist strikt grösser als 0. Somit wird der Umfang immer grösser in jeder Iteration. Also

ist der Umfang der kochschen Schneeflocke unendlich. Der Flächeninhalt ist hingegen offensichtlich beschränkt. Man kann ja einen grossen Kreis um die Schneeflocke legen, sodass der

Kreis nie überschritten wird durch irgendwelche Linien oder Punkte. Also ist der Flächeninhalt der Schneeflocke durch diesen Kreis beschränkt. Man kann es aber auch ausrechnen.

Wir überlegen uns zuerst, wieviele Liniensegmente wir im nten Schritt haben. In der 0ten Iteration haben wir 3, in jedem Schritt wird jedes

Liniensegment ersetzt durch eine aus vier Liniensegmenten bestehende Zacke. Somit haben wir $3 \cdot 4^n$ Liniensegmente im nten Schritt. Der Flächeninhalt ist die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke, die hinzugefügt werden. Nehmen wir an, das Dreieck, mit dem wir anfangen, habe Flächeninhalt 1. Danach werden die Dreiecke immer kleiner, die Seitenlänge ist immer $\frac{1}{3}$ der Seitenlänge der Dreiecke aus

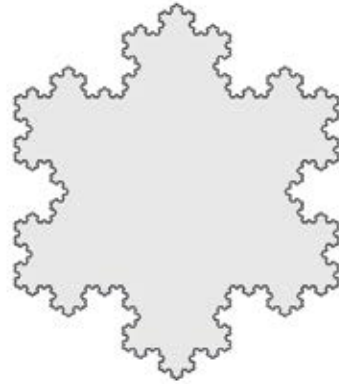


Konstruktion der Kochschen Schneeflocke.

der vorherigen Iteration. Folglich ist der Flächeninhalt immer $1/9$. Wenn wir nun noch die Anzahl der hinzugefügten Dreiecke, nämlich die Anzahl der Liniensegmente aus dem vorherigen Schritt betrachten, erhalten wir den folgenden Flächeninhalt für die Schneeflocke:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3 \cdot \frac{4^n}{9^n} = 3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{9^n} = 3 \cdot \frac{1}{1-4/9} = \frac{27}{5}$$

Somit hat die kochsche Schneeflocke einen endlichen Flächeninhalt, aber einen unendlichen Umfang. Wie wir es von einem mathematischen Objekt erwarten, ist sie also cooler als eine echte Schneeflocke, die ja aufgrund der endlich vielen Moleküle nicht einmal unendlich feine Strukturen aufweist. *



Kochsche Schneeflocke nach 7 Iterationen

ANZEIGE

Ich handle mit Energie.



Von Tradingfloor bis Proberaum: Als Mitarbeitende/r der BKW-Gruppe fließt Ihre Energie an vielen Orten. Und mit klimafreundlichem Strom aus Wasser, Wind, Sonne, Kernkraft und Biomasse lassen Sie täglich mehr als eine Million Menschen daran teilhaben – unterstützt von 2'800 kompetenten Kolleginnen und Kollegen.

Bei der BKW-Gruppe transportieren Netzwerke nicht nur Strom, sondern auch Vertrauen, Ideen und Begeisterung. Bei Ihrem Berufseinstieg als Wirtschaftler bilden Sie sich Ihr eigenes BKW-Netzwerk, gestalten Geschäftsprozesse mit und wachsen an den täglichen Herausforderungen im Stromgeschäft – beispielsweise als Analyst, Business Engineer oder Trader im Energiehandel. Bewerben Sie sich jetzt – Informationen und Einstiegsmöglichkeiten finden Sie auf der zentralen Stellenbörse unserer Webseite:

www.bkw-fmb.ch/karriere

BKW®